

入学試験問題(1次)

数 学

令和4年1月24日

9時00分—10時20分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
- 2 この問題冊子は表紙・白紙を除き9ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- 4 解答は、各設問ごとに一つだけ選び、解答用紙の所定の解答欄の該当する記号を塗りつぶすこと。
- 5 解答を訂正する場合は、消しゴムできれいに消すこと。
- 6 監督員の指示に従って、問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入し、解答用紙の指定欄に受験番号、受験番号のマーク、氏名を記入すること。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号					
------	--	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つだけ選び、解答用紙の該当する記号を塗り潰せ。

1 整式 $2x^3 + 7x^2 + 9x + 1$ を整式 $2x - 3$ で割ると、商が $Ax^2 + Bx + C$ 、余りが D となる。

$\frac{D-A}{C} + B$ の値を求めよ。

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

2 $x = \sqrt{2} + \sqrt{6}$, $y = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ であるとき、 $A = \frac{x^9 - y^9}{x^6 - y^6}$ とする。

$\frac{5A}{34\sqrt{2}}$ の値を求めよ。

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

3 2つの数 α , β を解とする2次方程式

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + (x+3)(x+1) = 0$$

について考える。

$(\alpha+2)(\beta+2) = \frac{1}{k}$ であるとき、 k の値を求めよ。

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

4 不等式 $\sqrt{3} \cos x \geq |2 \cos x - \sin x|$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を満たす x のとりうる範囲は、 $a \leq x \leq b$ と表せる。 $\frac{b}{a}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

5 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする ($i^2 = -1$)。 $|\omega^{100} + \omega^{50}|$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

6 1 辺の長さが 1 の正五角形 P について考える。正五角形 P の外接円を C とする。正五角形 P の面積を S, 外接円 C の面積を T と表記する。

$\frac{T}{S} \cdot \frac{5}{\pi} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ の値を求めよ。 $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ である。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

7 座標平面上(原点を O とする)において, 放物線 $C_1 : y = x^2$ 上に点 P (点 P の x 座標は正の実数とする), 放物線 $C_2 : y = \frac{1}{2}x^2$ 上に点 Q をとることにする。
 $\triangle OPQ$ の面積を S と表記する。

$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = -\frac{1}{2}$ のとき, S の最小値を m とする。 $2m^2$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

8 座標平面上(原点を O とする)において, 円 $C : (x - 2)^2 + y^2 = 1$ 上に点 P (点 P の y 座標は正の実数とする), 直線 $l : x = 0$ 上に点 $Q(0, t)$ (t は正の実数とする)をとることにする。

$\vec{OP} \cdot \vec{QP} = 0$ を満たしながら点 P, Q が動き, $|\vec{OQ}|$ が最小となるときの $\frac{5}{3} |\vec{OP}| |\vec{QP}|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

9 3つの点 $A(1, 2, -2)$, $B(2, 1, 3)$, $C(3, 4, 2)$ が定める平面 ABC 上に点 $P(0, 4, k)$ (k は実数)が存在するとき, $|2k + 10|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

10 実数 $x, y (y \geq 0)$ が $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を満たすとき、 $5x + 2y$ のとりうる値の範囲は、 $m \leq 5x + 2y \leq M$ となる。 $\sqrt{M^2 - m^2}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

11 実数 x, y は、 $2x^2 - 8x + 2y^2 - 1 < 0$ 、 $x^2 - 5x - y^2 + y + 6 < 0$ を満たすものとする。

$x + y$ と $x - y$ がともに整数となるとき、 $(x + y, x - y)$ の組はいくつあるか。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

12 座標平面上で点 P は原点 O から出発して、1)、2) のように動くものとする。

1) 1 枚の硬貨を投げて表であれば、 x 軸の正の方向へ 1 動く。

2) 1 枚の硬貨を投げて裏であれば、 y 軸の正の方向へ 1 動く。

硬貨を 7 回続けて投げたとき、線分 OP の長さが整数となる確率を k とする。

$16k$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

13 曲線 $C: y = x^3 - 27x^2 + 231x + 10$ と直線 $l: y = mx + m - 249$ (m は実数) は、点 A で接し、点 B で交わる。点 A の x 座標を α 、点 B の x 座標を β (α と β は実数、 $\alpha > \beta$) としたとき、 $\frac{2m}{\alpha} + \beta$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

14 関数 $y = 8^x + 8^{-x} - 5(4^x + 4^{-x}) + 6(2^x + 2^{-x}) + 5$ ($x \geq 1$, x は実数) の最小値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

15 $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、2つの曲線 $C1: y = \sin x$,
 $C2: y = -\frac{4}{3\pi^2}x^2 + \frac{4}{3}$ に囲まれた面積を S とする。
 $S - \frac{3}{2}\pi$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

16 曲線 $C1 : y = e^x - 1$ ($x > 0$, x は実数), 曲線 $C2 : y = \frac{1}{e^x - 1}$ ($x > 0$, x は実数), 直線 $L1 : x = \frac{1}{2}$, 直線 $L2 : x = k$ ($k > \log 2$, k は実数) について考える。直線 $L1$ と x 軸の交点を E , 直線 $L1$ と曲線 $C1$ の交点を F , 直線 $L2$ と x 軸の交点を G , 直線 $L2$ と曲線 $C2$ の交点を H とする。 x 軸, 線分 EF , 曲線 $C1$, 曲線 $C2$, 線分 GH で囲まれた面積を S_k とする。

$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ の値を求めよ。ただし, e は自然対数の底, $\log 2$ は自然対数とする。

必要があれば, $-\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - e^x}{e^x - 1}$ を用いよ。

㉗ $\frac{7}{2} + \sqrt{e}$ ㉘ $\frac{5}{2} + \sqrt{e}$ ㉙ $\frac{3}{2} + \sqrt{e}$ ㉚ $1 + \sqrt{e}$ ㉛ $\frac{1}{2} + \sqrt{e}$

㉜ $\frac{7}{2} - \sqrt{e}$ ㉝ $\frac{5}{2} - \sqrt{e}$ ㉞ $\frac{3}{2} - \sqrt{e}$ ㉟ $1 - \sqrt{e}$ ㊱ $\frac{1}{2} - \sqrt{e}$

17 $S = \int_1^{e^3} x^2 (\log x)^2 dx$ とする。 $\log\left(\frac{27S + 2}{65}\right)$ の値を求めよ。

ただし, e は自然対数の底, $\log x$, $\log\left(\frac{27S + 2}{65}\right)$ は自然対数とする。

㉗ 0 ㉘ 1 ㉙ 2 ㉚ 3 ㉛ 4

㉜ 5 ㉝ 6 ㉞ 7 ㉟ 8 ㊱ 9

次の文章を読み、以下の問い(問題 **18** ~ **21**)に対する選択肢から最も適当なものを一つだけ選べ。

関数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos^2 x (0 \leq x < 2\pi)$ の
 最大値 (M) と最小値 (m) について考える。

I $t = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ とおくと、 $t = A \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ とすることができる。
 $A = \mathbf{18}$ である。

18

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ 2 | ㉣ 3 | ㉤ 4 |
| ㉥ 5 | ㉦ 6 | ㉧ 7 | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

II 関数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos^2 x (0 \leq x < 2\pi)$ を t の式で
 表記すると、 $y = \frac{\sqrt{3}}{6} (t + B)^2 - C$ となる。
 $B = \mathbf{19}$ 、 $C = \mathbf{20}$ である。

19

- | | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ㉠ 0 | ㉡ 1 | ㉢ $\sqrt{3}$ | ㉣ $2\sqrt{3}$ | ㉤ $3\sqrt{3}$ |
| ㉥ $\sqrt{6}$ | ㉦ $2\sqrt{6}$ | ㉧ $3\sqrt{6}$ | ㉨ 8 | ㉩ 9 |

20

- | | | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|---------------|
| ㉠ 0 | ㉡ $\frac{1}{2}$ | ㉢ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ㉣ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | ㉤ $3\sqrt{3}$ |
| ㉥ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | ㉦ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ | ㉧ $\sqrt{6}$ | ㉨ 3 | ㉩ 6 |

Ⅲ $|3m + 4M|$ の値は **21** となる。

21

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ㉠ | 0 | ㉡ | 1 | ㉢ | 2 | ㉣ | 3 | ㉤ | 4 |
| ㉥ | 5 | ㉦ | 6 | ㉧ | 7 | ㉨ | 8 | ㉩ | 9 |

次の文章を読み、以下の問い(問題 **22** ~ **25**)に対する選択肢から最も適当なものを一つだけ選べ。

初項が a (a は正の整数)、公差が 3 の等差数列 $\{a_n\}$ (n は自然数) について考える。

この等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $S_n = 4095$ であるとき、以下の設問に答えよ。

I S_n は **22** と表すことができる。

22

- | | | | |
|---|----------------------------|---|----------------------------|
| ㉠ | $n(2a + 3n)$ | ㉡ | $n(2a + 3n - 1)$ |
| ㉢ | $n(2a + 3n - 2)$ | ㉣ | $n(2a + 3n - 3)$ |
| ㉤ | $n(2a + 3n - 4)$ | ㉥ | $\frac{n}{2}(2a + 3n)$ |
| ㉦ | $\frac{n}{2}(2a + 3n - 1)$ | ㉧ | $\frac{n}{2}(2a + 3n - 2)$ |
| ㉨ | $\frac{n}{2}(2a + 3n - 3)$ | ㉩ | $\frac{n}{2}(2a + 3n - 4)$ |

II a は23と表すことができる。

23

ア $\frac{4095}{n} - \frac{3}{2}n$

カ $\frac{4095}{n} - \frac{3}{2}(n-1)$

イ $\frac{4095}{n} - \frac{3}{2}(n-2)$

ク $\frac{4095}{n} - \frac{3}{2}(n-3)$

エ $\frac{4095}{n} - \frac{1}{2}n$

コ $\frac{4095}{n} - \frac{1}{2}(n-1)$

オ $\frac{4095}{n} - \frac{1}{2}(n-2)$

サ $\frac{4095}{n} - \frac{1}{2}(n-3)$

カ $\frac{4095}{n} - \frac{3}{2}(2n-1)$

セ $\frac{4095}{n} - \frac{3}{2}(2n-3)$

III $n = 24$ のとき、 a は最小値25をとる。 $(a$ は正の整数)

24

ア 39

カ 40

イ 41

ク 42

コ 43

エ 44

オ 45

カ 46

ク 47

コ 48

25

ア 16

カ 17

イ 18

ク 19

コ 20

エ 21

オ 22

カ 23

ク 24

コ 25