解答

曲線 C: $y=\dfrac{1}{x}$ （x は実数，　$x>0$）について考える。

点 P（k , k）（k は実数，　$k>0$）から, 曲線 C 上に存在する相異なる 2 つの

点 Q$\left(\alpha,\dfrac{1}{\alpha}\right)$，点 R$\left(\beta,\dfrac{1}{\beta}\right)$（$\alpha,\beta$ は実数，　$\beta>\alpha>0$）に対し引いた直線は,

どちらも曲線 C と接するものとする。

1）　曲線 C 上の点$\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$（$t$ は実数，　$t>0$）における接線の方程式を求めよ。

$f(x)=\dfrac{1}{x}$，　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$　であるので，曲線 C 上の点$\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$における接線の方程式は,

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ であり，　$y-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$ となるので,

$y=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$　式①　が求める接線の方程式である。

2）上記の条件を満たす k の範囲を求めよ。

式①の接線が点 P（k , k）を通過することより，　$k=-\dfrac{1}{t^2}k+\dfrac{2}{t}$　式②　となる。

$t>0$ なので，式②の両辺に　t^2 をかけて整理すると，　$t^2k-2t+k=0$　式③　である。

$k>0$ より，式③は，　$t^2-\dfrac{2}{k}t+1=0$　式④　と変形することができる。（この式④の t についての２次方程式の実数解が題意の条件を満たす接点の x 座標を表すことになる）

式④が相異なる２つの実数解　α , β（２つの接点　Q, R　それぞれの x 座標）を持つための必要十分条件は，式④の判別式（D）が $D>0$　となることである。$D=\dfrac{4}{k^2}-4>0$　より，

$k^2<1$　であり，　条件の $k>0$ をあわせると上記の条件を満たす k の範囲は, $0<k<1$　となる。

3)座標平面上の原点を O としたとき，直線 OP と直線 QR の交点を S とする。
△PQS と△PRS が合同であることを証明し，$\alpha\beta$ の値を求めよ。

題意より，$t^2-\frac{2}{k}t+1=0$ 式④ は，相異なる２つの実数解 α，β をもつこととなるので，

$t^2-\frac{2}{k}t+1=(t-\alpha)(t-\beta)=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$ 式⑤ が成立する。解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=\frac{2}{k}$ 式⑥　$\alpha\beta=1$ 式⑦ となる。式⑦より，$\beta=\frac{1}{\alpha}$ 式⑧ であるので，

点 Q$\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$，点 R$\left(\frac{1}{\alpha},\alpha\right)$（$\frac{1}{\alpha}>\alpha>0$） と表示できる（点 Q と点 R は直線 OP($y=x$)について対称となる）（図１）。直線 QR の傾き($m1$)は，$m1=\dfrac{\alpha-\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}-\alpha}=-1$ であり，直線 OP($y=x$)の傾き($m2$)は，$m2=1$ となる。 $m1\cdot m2=-1$ であるので，直線 QR と直線 OP($y=x$)は直交する(図１)。従って，△PQS と△PRS はどちらも直角三角形である(図１)。

線分 QR の中点 $\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\right)$ が直線 OP($y=x$)上に存在することより，線分 QR の中点が点 S となる(図１)。以上の知見をグラフ化し，図１として提示する。

２つの直角三角形△PQS と△PRS について,辺 PS は共通(図１)で同じ長さとなり，それぞれの直角三角形の斜辺である辺 PQ と辺 PR の長さは共に $\sqrt{(k-\alpha)^2+\left(k-\frac{1}{\alpha}\right)^2}$ となり同一となる(図１)。直角三角形は斜辺と他の１辺の長さが等しければ合同となるので，

△PQS≡△PRS が証明される。

4）∠QPR=$\dfrac{2}{3}\pi$ となるとき，k の値および点 Q と点 R の各座標を求めよ。

条件より∠QPR=$\dfrac{2}{3}\pi$。 △PQS と△PRS が合同であることより，$\angle QPS = \angle RPS = \dfrac{\pi}{3}$，

$\tan\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{SQ}{PS} = \sqrt{3}$ 式⑨となる（図２）。

図２より，$SQ = \sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\right)^2}$ 式⑩ $PS = \sqrt{2\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2\alpha} - k\right)^2}$ 式⑪ と求めることができる。式⑨式⑩式⑪より，$\dfrac{\sqrt{2\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2\alpha}\right)^2}}{\sqrt{2\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2\alpha} - k\right)^2}} = \sqrt{3}$ 式⑫ となる。 式⑫の両辺を２乗して整理すると，$\dfrac{\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2}{\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha} - 2k\right)^2} = \dfrac{\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 - 4}{\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha} - 2k\right)^2} = 3$ 式⑬ が成立する。

$\alpha + \beta = \dfrac{2}{k}$ 式⑥ および $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$ 式⑧ より，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{2}{k}$ 式⑭ である。 式⑭を式⑬に代入して整理すると，$3k^4 - 5k^2 + 2 = (k^2 - 1)(3k^2 - 2) = 0$ が成立し，$0 < k < 1$ であるので，$k^2 = \dfrac{2}{3}$，$k = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 式⑮ となる。式⑮を式⑭に代入すると，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{6}$ であり，$\alpha^2 - \sqrt{6}\alpha + 1 = 0$ 式⑯ と変形される。$\beta\left(= \dfrac{1}{\alpha}\right) > \alpha > 0$ に注意して，式⑯を解くと，

$\alpha = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ ，$\beta = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ となる。

従って， 点 Q$\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\right)$， 点 R$\left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$である。

図1

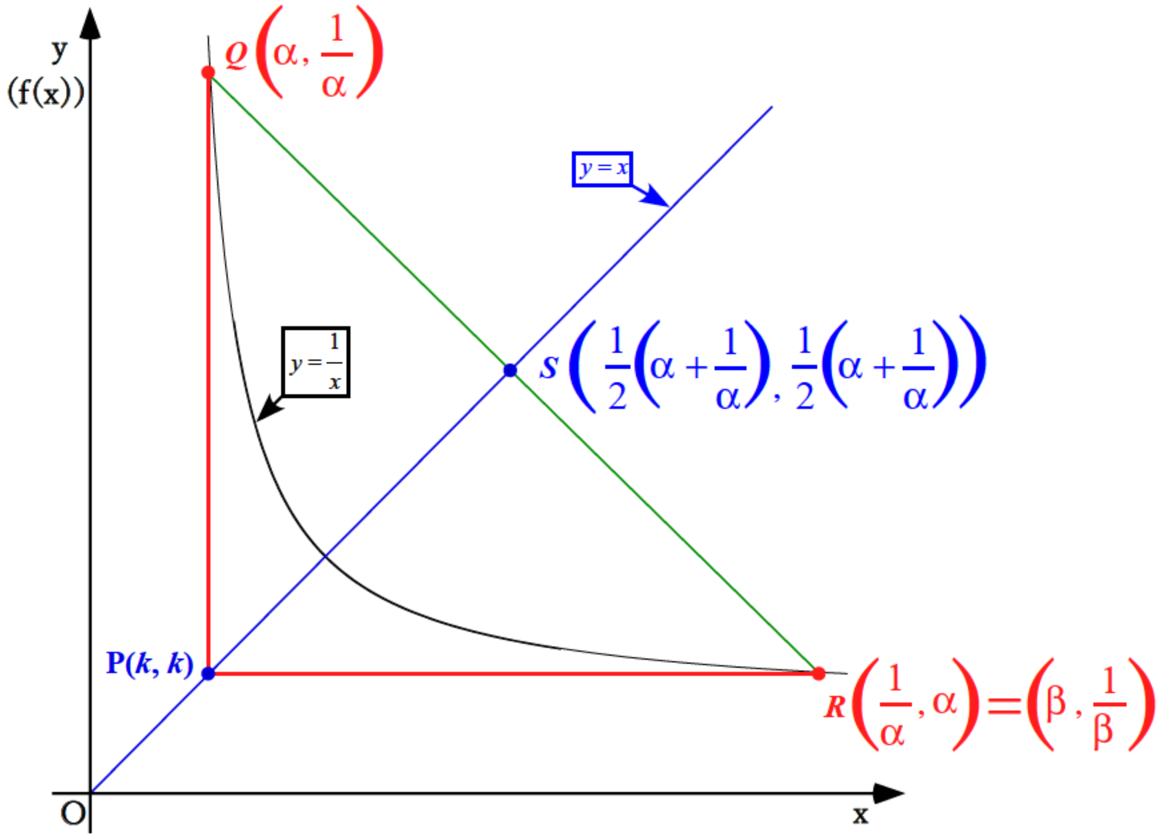
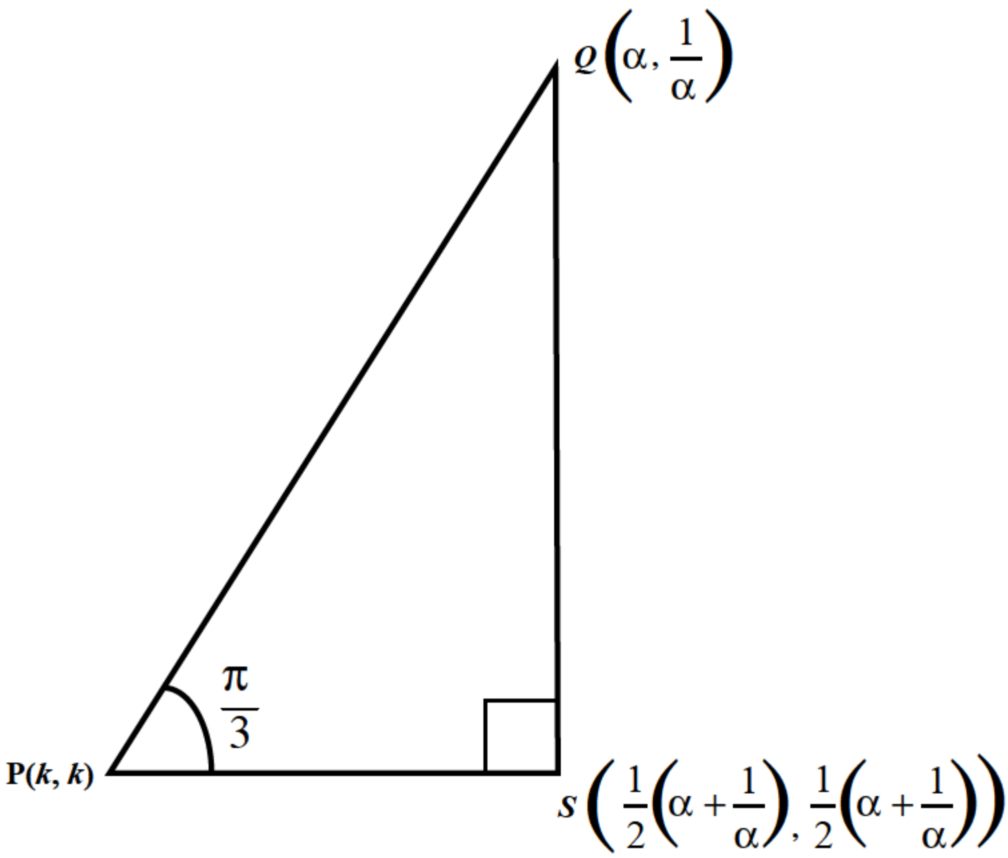


図2



$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{SQ}{PS} = \sqrt{3}$$